القسم: رياضيات الفصل الأول

السنة: الثالثة المادة: ميكانيك (2)

المحاضرة الثالثة عملي

تمرين: لدينا S الشكل كرة متجانسة صماء كتلتها m ونصف قطرها R

المطلوب:

1- احسب عزم عطالة الكرة بالنسبة لمركزها

2- احسب العزم بالنسبة لأحد أقطارها

3- عزم عطالة الكرة بالنسبة لأحد مستوياتها الأساسية

4- أوجد مصفوفة العطالة

5- احسب عزم عطالة الكرة بالنسبة لمماس على محيطها

الحل:

$dv = dx\, dy\, dz$

$dv = |J| . dr . d\varphi . d\theta$

$x = r \sin\theta \cos\varphi$ $\qquad 0 \le r \le R$

$y = r \sin\theta \sin\varphi$ $\qquad 0 \le \theta \le \pi$

$z = r \cos\theta$ $\qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$dv = r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$

$dm = \rho\, dv \Rightarrow m = \rho V$ $\qquad$ P. T. O

$\Rightarrow m = \rho V$ (حجم الكرة $\frac{4}{3}\pi R^3$)

$$I_o = \rho \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \rho \frac{R^5}{5} \, 2\pi \cdot 2 = \rho \frac{4}{5} \pi R^5$$

$$= \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \frac{3}{5} R^2 = \frac{3}{5} m R^2$$

? I_x, I_y, I_z [2]

$$I_x = \rho \int_V (y^2 + z^2) \cdot r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$y^2 + z^2 = r^2 - x^2 = r^2 - r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi$$

$$= r^2 (1 - \sin^2\theta \cos^2\varphi)$$

$$I_x = \rho \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2\theta \cdot \cos^2\varphi) \cdot r^4 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^{2\pi} \left[\int (1 - \sin^2\theta \cos^2\varphi) \sin\theta \, d\theta \right] d\varphi$$

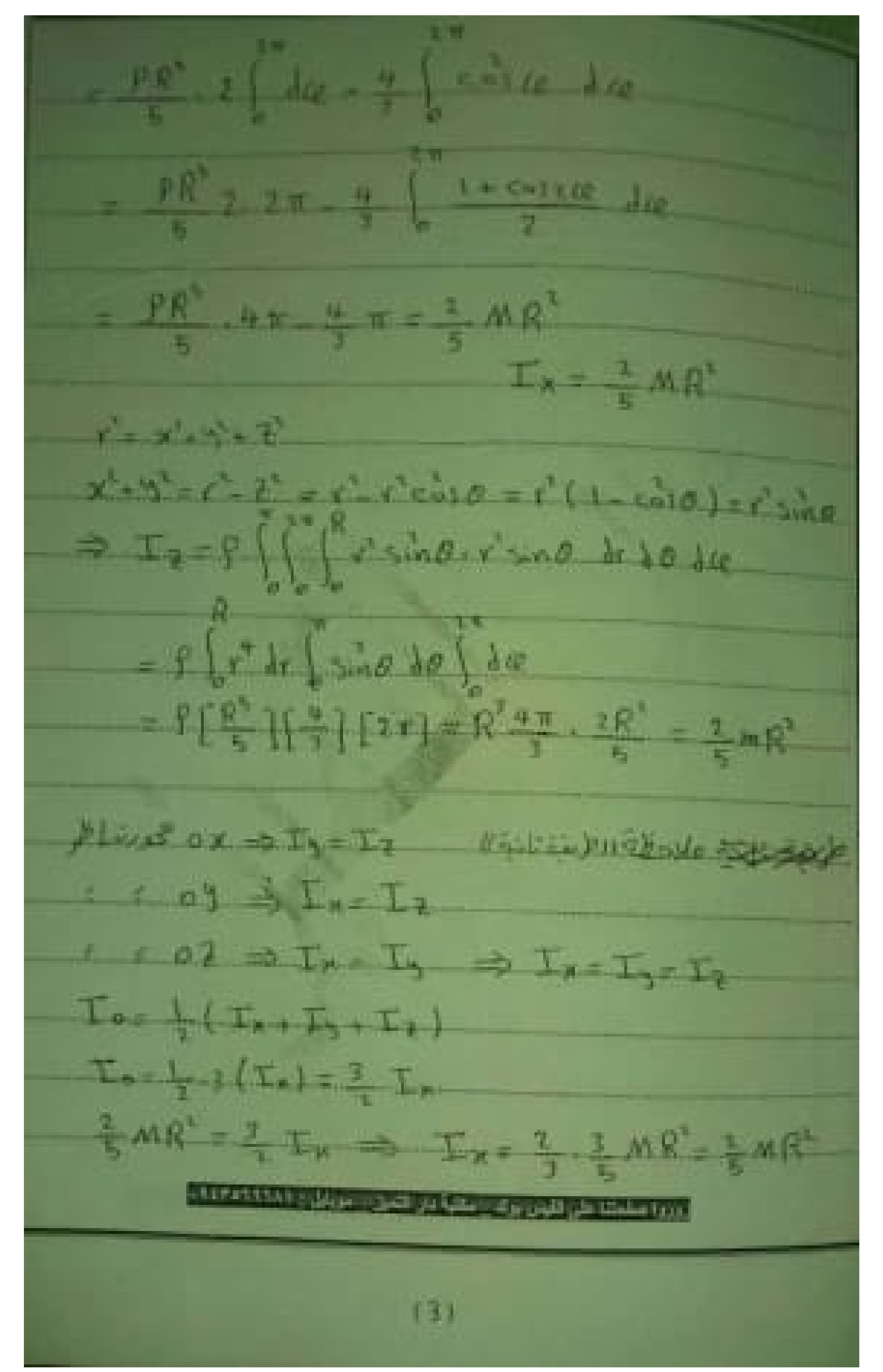
$$= \frac{\rho R^5}{5} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\pi \sin\theta \, d\theta - \cos^2\varphi \int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta \right] d\varphi$$

$$\int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta = \int_0^\pi \sin^2\theta \cdot \sin\theta \, d\theta = \int_0^\pi (1 - \cos^2\theta) \sin\theta \, d\theta$$

$$t = \cos\theta \Rightarrow dt = -\sin\theta \, d\theta$$

الجواب $= \frac{4}{3}$

$$= \frac{\rho R^5}{5} \int_0^{2\pi} \left[2 - \frac{4}{3} \cos^2\varphi \right] d\varphi$$



$$= \frac{\rho R^5}{5}\left[2\int_0^{2\pi} d\varphi - \frac{4}{3}\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi\right]$$

$$= \frac{\rho R^5}{5}\left[2 \cdot 2\pi - \frac{4}{3}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\, d\varphi\right]$$

$$= \frac{\rho R^5}{5}\left[4\pi - \frac{4}{3}\pi\right] = \frac{2}{5} M R^2$$

$$I_x = \frac{2}{5} M R^2$$

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$x^2 + y^2 = r^2 - z^2 = r^2 - r^2\cos^2\theta = r^2(1-\cos^2\theta) = r^2\sin^2\theta$

$$\Rightarrow I_z = \rho \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r^2\sin^2\theta \cdot r^2\sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \rho \int_0^{R} r^4\, dr \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \rho\left[\frac{R^5}{5}\right]\left[\frac{4}{3}\right]\left[2\pi\right] = \rho R^3\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{2R^2}{5} = \frac{2}{5} m R^2$$

$ox \Rightarrow I_y = I_z$

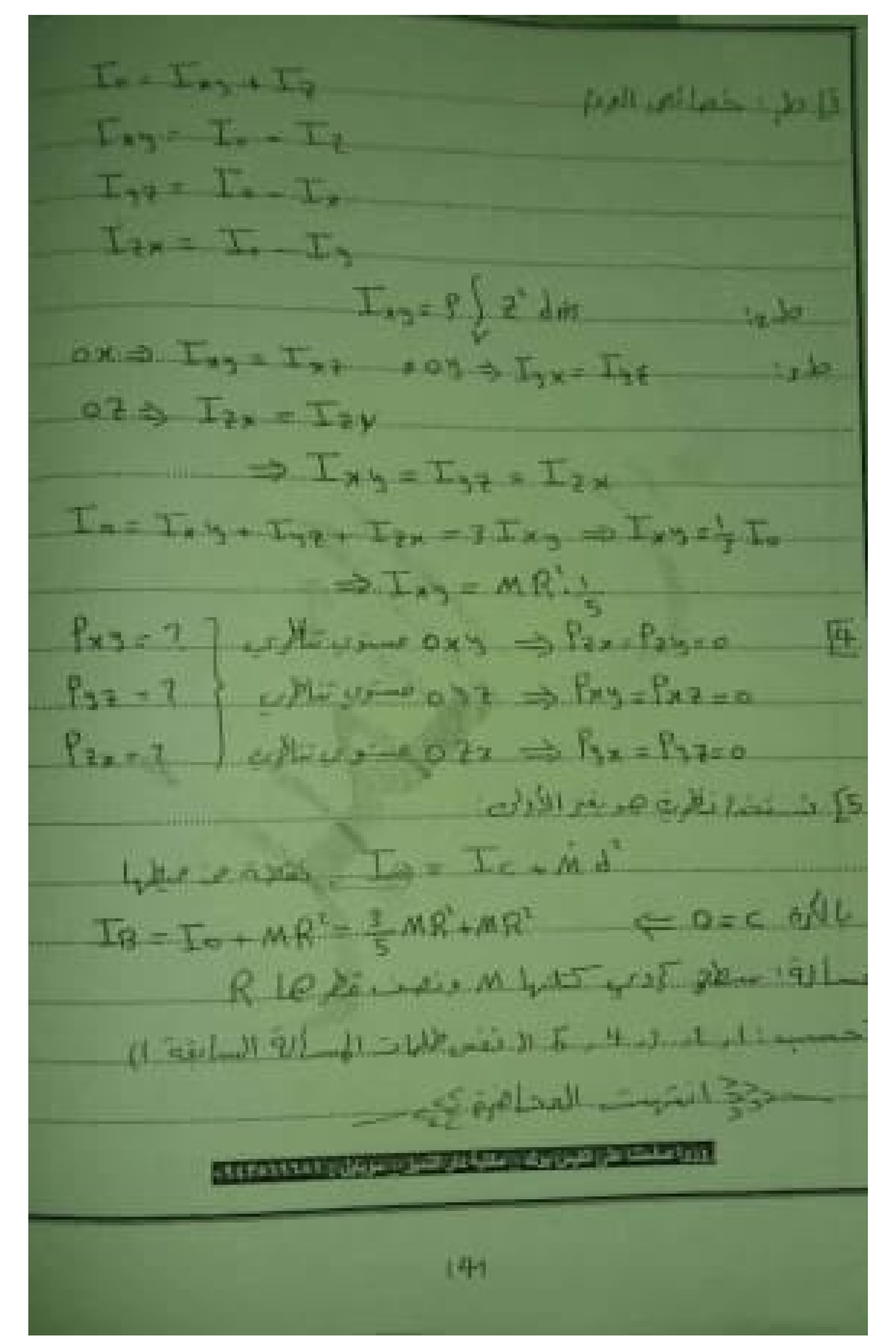
" " $oy \Rightarrow I_x = I_z$

" " $oz \Rightarrow I_x = I_y \Rightarrow I_x = I_y = I_z$

$I_o = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z)$

$I_o = \frac{1}{2}\cdot 3(I_x) = \frac{3}{2} I_x$

$\frac{3}{5} M R^2 = \frac{3}{2} I_x \Rightarrow I_x = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5} M R^2 = \frac{2}{5} M R^2$



3) حل: خصائص العزم

$I_o = I_{xy} + I_z$

$I_{xy} = I_o - I_z$

$I_{yz} = I_o - I_x$

$I_{zx} = I_o - I_y$

حل: $I_{xy} = \rho \int_V z^2 \, dm$

حل: $ox \Rightarrow I_{xy} = I_{xz}$, $oy \Rightarrow I_{yx} = I_{yz}$

$oz \Rightarrow I_{zx} = I_{zy}$

$\Rightarrow I_{xy} = I_{yz} = I_{zx}$

$I_o = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx} = 3 I_{xy} \Rightarrow I_{xy} = \frac{1}{3} I_o$

$\Rightarrow I_{xy} = MR^2 \cdot \frac{1}{5}$

4) $P_{xy} = ?$, $P_{yz} = ?$, $P_{zx} = ?$

مستوي تناظر $oxy \Rightarrow P_{zx} = P_{zy} = 0$

مستوي تناظر $oyz \Rightarrow P_{xy} = P_{xz} = 0$

مستوي تناظر $ozx \Rightarrow P_{yx} = P_{yz} = 0$

5) نستخدم نظرية هويغنز الأولى

$I_\Delta = I_c + M d^2$

لكن $O = C \Leftarrow$

$I_B = I_O + MR^2 = \frac{3}{5} MR^2 + MR^2$

مسألة: سطح كرة متجانسة كتلتها M ونصف قطرها R

احسب ... نفس طلبات المسألة السابقة !!

[illegible]